Dimanche 6 février 2022 (17h-19h) : cinquième leçon de maths modernes

ANALYSE COMPLEXE (CAUCHY, 1838) : PROLONGATION ANALYTIQUE ET ACTION RÉGIONALE

Salle des Quatre Chemins (du théâtre de la Commune)
41, rue Lécuyer - 93300.Aubervilliers

François NICOLAS

Enjeu intellectuel

En ces temps gorgés d'angoisse, nos raisons (matérialistes) d'espérer sont plus que jamais précieuses. À la lumière de la mathématique moderne, l'action restreinte, que Mallarmé a inscrite au cœur de l'intellectualité contemporaine comme puissance affirmative, non comme renoncement, nous en fournit une de première importance.

Mais en quoi l'action restreinte organise-t-elle une telle puissance affirmative et laquelle exactement ? En quoi une telle puissance, matériellement inscrite dans la constitution d'une **région** reliant a minima deux **localisations** différentes, fonde-t-elle une espérance (qui ne trompe pas) dans une possible prolongation **globale** d'une action régionalement restreinte ?

Sur tout ceci, cette partie de la mathématique moderne constituée, à partir de Cauchy, par l'analyse des fonctions complexes peut nous éclairer et nous guider rationnellement, ses victoires dans la pensée (Ian Stewart : « *Beaucoup de batailles ont déjà été gagnées*. ») constituant des socles pour les intellectualités contemporaines soucieuses d'émancipation.

Analyse mathématique

L'argumentation mathématique s'enchaînera selon les cinq étapes suivantes.

1) Soit f(z) une fonction **complexe** sur un domaine D du plan complexe $\mathbb{C}$. Cette fonction, transformant une grandeur complexe en une autre, va formaliser le type d'action qui nous intéresse : une action qui, dans une situation donnée, transforme les rapports entre effectivités et possibilités et non pas seulement, comme le fait une fonction *réelle* (c'est-à-dire sur $\mathbb{R}$), les seules effectivités.
   On a vu en effet, dans la leçon précédente, comment les grandeurs complexes *intriquent* effectivités « réelles » et possibilités « imaginaires » en sorte qu'une fonction « complexe » vient formaliser l'action suivante :
   $$x_{\text{effectif}} + y_{\text{possible}} \rightarrow x'_{\text{effectif}} + y'_{\text{possible}}$$
   Une action *restreinte* ou *régionale* s'inscrit dans ce type spécifique d'action *complexe* qui prend acte que, dans une situation donnée, il n'y a pas que ce qu'il y a *effectivement* car il y a également les possibilités et les potentialités propres de cette situation.
   Dans l'énoncé « Il n'y a pas que ce qu'il y a », la *négation doublée* (négation dite *confirmative* - « ne… pas… » - d'une première négation dite *exceptive* - « ne… que… ») vaut affirmation d'une extension de la situation à ses possibles, présents mais non présentés comme tels.
   On rappellera au passage que cette algèbre des grandeurs complexes repose sur leur capacité de faire corps, capacité qui s'attache essentiellement à la possibilité de se multiplier entre elles (c'est-à-dire de s'affecter) et à l'adjonction d'une *semi-négation* $\sqrt{-1}$.
   i=$\sqrt{-1}$ est la *semi-négation* (au sens d'une extraction de racine : $\sqrt{négation} = négation^{1/2}$) de **1** (dont **-1** est la négation complète : **i*i=-1**).
2) Supposons maintenant que cette fonction f(z) soit **différentiable** sur le domaine D considéré.
   La propriété de différenciation veut dire que, localement en α∈D, *le résultat* df de l'action f sur z sera commensurable, selon f'(α), à son *origine* dz :
   $$df=f'(\alpha)*dz$$
   Assurer la différenciation de l'action impliquera de respecter des contraintes spécifiques, plus exigeantes que dans le cas réel : les *conditions* dites *de Cauchy-Riemann*.
   On va en déduire des propriétés tout à fait extraordinaires de la fonction f, propriétés qui n'ont nul équivalent pour les fonctions *réelles* agissant sur $\mathbb{R}^2$ c'est-à-dire sur un plan « réel » pourtant apparenté au plan « complexe » $\mathbb{C}$.
3) En tout point α du domaine D où f intervient, on peut alors construire une ***intégrale de contour*** telle que l'action *discrète* de f en ce point α équivaut à son action *continue* en faisant le tour de ce point.
   Ainsi – propriété inattendue - agir en un point α équivaut à agir sur le contour d'un de ses voisinages !
4) Ce bond du discret au continu autorise paradoxalement une redescente vers l'infini dénombrable : toute fonction complexe différentiable l'étant **indéfiniment** (ce qui n'est aucunement le cas pour les fonctions réelles), on déduit en effet que, sur le domaine de départ D, la fonction f est caractérisable de proche en proche selon une formulation désormais algébrique, dite en ***série entière***, qui la structure *localement* en polynôme infini et la dote ce faisant d'une rigidité cristalline apte à proliférer. On dira que la fonction f est *analytique*.
   Cette propriété cristallographique est la clef des propriétés sans égal des fonctions complexes différentiables.
   Ainsi analyser une situation donnée en termes de grandeurs complexes impose certes une plus grande rigueur d'intervention mais cette rigueur gage en retour une plus grande simplification de l'action en question.
   Où l'on retrouve un point, dégagé lors de la précédente leçon sur les grandeurs complexes : complexifier une situation (en y incorporant ses possibilités latentes) n'est pas la compliquer et par là entraver les possibilités d'y intervenir ; tout au contraire, c'est simplifier les interventions qui y deviennent envisageables, interventions de type nouveau car jouant de possibilités explicitement intégrées à la situation.

5) D'où se démontre (en incorporant désormais les noms de Weierstrass et Riemann) le résultat pour nous essentiel : une telle fonction s'avère ***analytiquement prolongeable*** sur tout le domaine D et ce de telle manière que, comme le métaphorise Tristan Needham, « *si deux fonctions analytiques ont des effets identiques sur la courbe dessinée par un simple cil tombé d'un œil dans une rue de San Francisco, alors elles ont des effets identiques sur toute la Californie !* ».

Interprétation

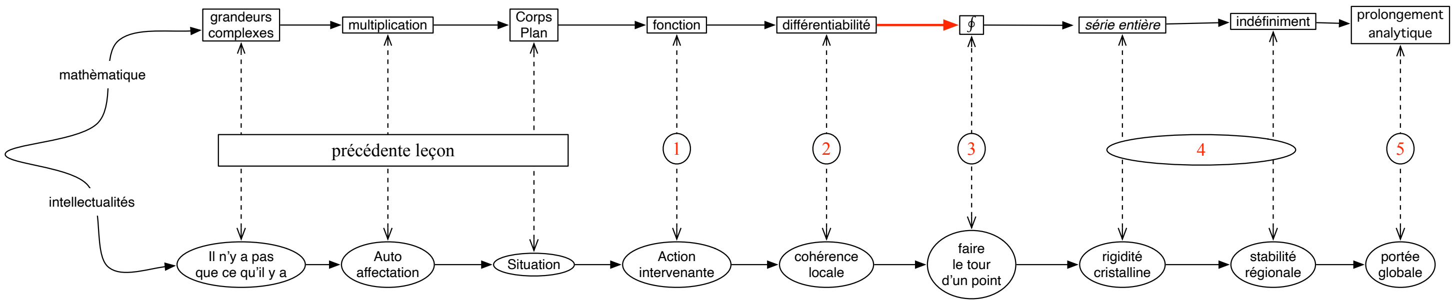
Rendue en ce point, l'action, autolimitée à une région où se constitue un ferme trajet d'intervention entre deux points séparés, révèle sa puissance globale selon ce qu'on appellera ***le « théorème » de l'action régionale***.

- Posons que dans une situation donnée, l'action dite « complexe » ambitionne de transformer les rapports internes à cette situation entre effectivités, possibilités et potentialités (sans se contenter donc, comme le fait l'action « réaliste », de gérer les effectivités existantes, c'est-à-dire de recombiner ce qu'il y a factuellement là, au vu et au su de tous).
- Pour ce faire, une telle action doit assurer la délicate cohérence de son intervention transformatrice (sa « différentiabilité ») : cette cohérence est en effet plus difficile à assurer pour une action « complexe » (c'est-à-dire *intervenante*) que pour une action dite « réaliste » (c'est-à-dire *gérant* l'existence de ce qui est empiriquement disposé aux yeux de tous).
- Mais si elle y parvient, une telle action peut légitimement ambitionner d'opérer à l'échelle globale du domaine concerné (sans se limiter donc au seul « agir localement ») pour peu qu'elle assure sa constitution sur une région reliant a minima deux lieux disjoints : sa réussite régionale fondera alors, de manière matérialiste et rationnelle, l'espérance de son extension globale.

Ainsi il s'avère possible d'échapper au confinement d'une « action locale » (celle à laquelle le conformisme contemporain au désordre du monde capitaliste voudrait condamner ceux qui légitimement ambitionnent de le changer globalement et radicalement) en reliant deux « lieux » sous le chef d'une même ligne transformatrice en sorte de constituer une « région » de type nouveau (région à portée globale : *zone libérée*, ZAD…), devenue effectivement extensible et matérialisant ainsi une réelle « pensée globale ».

Au total, ce « théorème » vient rationaliser le principe émancipateur de Saint Paul : « à la différence de l'espoir (trompeur) en un futur Grand Soir, l'espérance (en une portée globale des interventions ici et maintenant) ne trompe pas quand elle procède d'une victoire d'ores et déjà régionalement acquise ! »

Ce faisant, nous aurons ainsi procédé au doublage des concepts mathématiques par les notions intellectuelles suivantes :



***

Documentation

- Ian Stewart & David Tall : *Complex Analysis* (Cambridge University Press, 2° édition 2018) [https://b-ok.cc/book/3559849/035bc4]
- Tristan Needham : *Visual Complex Analysis* (Clarenron Press – Oxford, 1997) [https://b-ok.cc/book/974187/196adc]

Nouveau programme des prochaines leçons

- 20 mars 2022 : théorie *algébrico-géométrique* des **quaternions** (Hamilton, 1843)
- 3 avril 2022 : théorie *géométrique* de la **courbure intrinsèque** (Gauss, 1828)
- 22 mai 2022 : théorie *topologique* des **variétés** (Riemann, 1854)

Sites internet :
- https://www.lacommune-aubervilliers.fr/saison/21-22-cours-de-mathematiques-modernes/
- http://www.entretemps.asso.fr/Nicolas/mathsmodernes/

Chaîne Youtube : https://www.youtube.com/playlist?list=PLfaS0zIQOD6T8l_q5vI7dttEMc_YkdeeF
Liste de discussion : mathsmodernes@framalistes.org